JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 11, 77–92 (1972)

Sur la Résolution d'une Équation et d'une Inéquation Paraboliques non Linéaires

O. GRANGE

43, Rue du Cherche Midi, 75-Paris VI, France

ET

F. MIGNOT

24, Rue des Fossés Saint Bernard, 75-Paris V, France

Received November 15, 1971

INTRODUCTION

On démontre dans la première partie un théorème d'existence pour le problème de Cauchy dans le cas des équations paraboliques non linéaires de la forme:

$$(d/dt)(Bu) + Au = f,$$

où A et B désignent des sous différentiels[1] de fonctions convexes continues ϕ_A et ϕ_B définies sur des Banach V_1 et V_2, A et B étant astreints aux conditions suivantes:

(1) ϕ_A coercif;

(2) V_1 s'injecte de façon compacte dans V_2;

(3) A et B sont bornés sur les bornés.

On retrouve ainsi l'équation [2, 3],

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\alpha-2}u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \text{ pour } \alpha < p.$$

[1] On rappelle la définition du sous différentiel: Soit V un espace localement convexe et ϕ une fonction convexe s.c.i. définie sur V à valeurs dans $R \cup \{+\infty\}$. Le sous différentiel de ϕ en x, noté $\partial\phi(x)$ est le sous ensemble (éventuellement vide) de V' vérifiant: $u \in \partial\phi(x)$,

$$\forall y \in V \quad \phi(y) - \phi(x) \geqslant (u, y - x) \quad \text{où } (\ ,\ ) \text{ désigne la dualité entre } V' \text{ et } V.$$

La deuxième partie est relative aux inéquations du type (avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses que ci-dessus):

$$\left(\frac{d}{dt}(Bu) - f, a - u\right) + \phi_A(a) - \phi_A(u(t)) \geqslant 0 \text{ p.p. ent et } \forall\, a \in K,$$

où K désigne un convexe fermé de V_1 avec $O \in \mathring{K}$ ($\mathring{K}$ intérieur de K). On obtient un théorème d'existence, moyennant l'hypothèse supplémentaire: ϕ_B positivement homogène.

Étude de l'Équation

A. *Hypothèses et Notations*

Les espaces vectoriels considérés sont tous réels. **R** désigne le corps des réels.

(1) Soient V_1 et V_2 deux Banach séparables, réflexifs, $V_1 \subset V_2$, avec injection compacte et dense. Les dualités compatibles (V_1, V_1') et (V_2, V_2') sont notées $(\ ,\ )$. La norme dans V_1 est notée $|\ |_{V_1}$. De même dans V_2, V_1', V_2'.

(2) On désigne par ϕ_A (resp. Φ_B) une fonction convexe, continue, définie sur V_1 (resp. sur V_2) et par A (resp. B) les sous différentiels de ϕ_A (resp. de ϕ_B) (voir Introduction). On suppose de plus que A (resp. B) est borné sur les bornés de V_1 (resp. de V_2).

On fait l'hypothèse de coercivité sur A: il existe q, $1 < q < +\infty$, tel que:

$$\liminf_{|u|_{V_1} \to +\infty} \frac{\phi_A(u)}{|u|_{V_1}^q} > 0.$$

Remarque. L'opérateur A (resp. B) est en général multivoque de V_1 dans V_1' (resp. de V_2 dans V_1') et du fait que ϕ_A et ϕ_B sont continues, les domaines de A et B sont respectivement V_1 et V_2.

B. *Enoncé de la proposition*

Données.

(4) On se fixe les conditions initiales:

$$u_0 \in V_1,\ \xi \in Bu_0;$$

$$f \in L^\infty(O, T; V_1'),\ \frac{df}{dt} \in L^{q'}(O, T; V_1'),\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \tag{5}$$

PROPOSITION 1. *L'équation* (6) $[d(Bu)]/dt + Au \ni f$ *dans* $\mathscr{D}'(]O, T[, V_1')$ *avec les conditions initiales* (4), *admet une solution u, c'est-à-dire: il existe deux fonctions u et v vérifiant,*

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(O, T; V_1), \\ &v \in L^\infty(O, T; V_2'), \quad v(t) \in Bu(t) \text{ p.p}, (dv/dt) \in L^\infty(O, T; V_1'), \end{aligned} \tag{7}$$

$$v(0) = \xi, \tag{8}$$

$$(dv/dt) - f \in Au(t) \text{ p.p. .} \tag{9}$$

Remarque. 1. (8) a bien un sens car il résulte de $v \in L^\infty(O, T; V_2')$ et de $(dv/dt) \in L^\infty(O, T; V_1')$ que $v \in \mathscr{C}([O, T], V_1')$.

2. Si A et B sont univoques, alors la fonction est égale presque partout à Bu et le signe d'appartenance dans (9) est remplacé par le signe $=$. Dans le case général la proposition (1) signifie qu'il existe des fonctions v et u telles que $v(t)$ est presque partout dans le sous différentiel $Bu(t)$ et $[(dv/dt) - f]$ dans le sous différentiel $Au(t)$.

C. *Exemples*

1. On retrouve l'équation [2, 3] indiquée dans l'introduction, en prenant: (Ω désigne un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$)

$$V_1 = W_0^{1,p}(\Omega), \quad V_2 = L^\alpha(\Omega), \quad \alpha \leqslant p,$$

$$\phi_A(u) = \frac{1}{p}\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^p dx\right), \quad A = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{u(x)}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right),$$

$$\phi_B(u) = \frac{1}{\alpha}\int_\Omega |u(x)|^\alpha dx, \quad B = |u(x)|^{\alpha-2}u(x)$$

$$f \in L^\infty(O, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \frac{\partial f}{\partial t} \in L^{p'}(O, T; W^{-1,p'}(\Omega))$$

(La coercivité de A se vérifie avec $q = p$).

2. On prend encore $V_1 = W_0^{1,p}(\Omega)$, $V_2 = L^\alpha(\Omega)$, $\alpha \leqslant p$, (Ω désignant un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$),

$$\phi_B : L^\alpha \to \mathbf{R}, \phi_B(u) = \frac{1}{\alpha}\int_\Omega (u^+(x))^\alpha dx, \text{ où } u^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } u(x) \leqslant 0 \\ u(x) & \text{si } u(x) > 0. \end{cases}$$

ϕ_A: comme dans l'exemple (1), de même pour f, alors la proposition s'applique à l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^+)^{\alpha-1} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f$$

3. On prend pour V_2 un espace de Hilbert, et $\phi_B(u) = \sup(\frac{1}{2}, |u|^2/2)$ ($|u|$ désigne la norme dans H). Dans ce cas:

$$\partial\phi_B(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } |u| < 1, \\ \{(\lambda u), \lambda \in [0, 1]\} \text{ si } |u| = 1, \\ u \text{ si } |u| > 1. \end{cases}$$

Soit V_1 Banach et ϕ_A vérifiant les conditions de la proposition, alors l'équation

$$(d/dt)(Bu) + Au \ni f$$

admet une solution, c'est-à-dire: il existe deux fonctions u et v vérifiant:

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(O, T; V_1), && v \in L^\infty(O, T; V_2'), \\ &(dv/dt) \in L(O, T; V_1'), && v(O) = \xi \in Bu_0, \\ &(dv/dt) - f \in -Au(t) \text{ p.p.} \end{aligned}$$

donc si

$$\begin{aligned} &|u(t)| < 1 && v(t) = 0, \\ &|u(t)| = 1, && \text{il existe } \lambda \in [0, 1] \quad v(t) = \lambda u(t), \\ &|u(t)| > 1 && v(t) = u(t), \end{aligned}$$

et s'il existe deux ouverts O_1 et O_2 inclus dans $[O, T]$ tels que $t \in O_1$, $|u(t)| < 1$; $t \in O_2$, $|u(t)| > 1$, l'équation se réduira alors à: $t \in O_1$, $f \in Au(t)$ (équation du type elliptique); $t \in O_2$, $(du/dt) + f \in Au(t)$ (type parabolique).

D. *Démonstration*

LEMME 1. *Soient V_1 et V_2 deux espaces de Banach, $V_1 \overset{i}{\hookrightarrow} V_2$, i application linéaire continue, et ϕ: $V_2 \to \mathbf{R}$ une application linéaire continue. Alors pour tout x de V_1*

$$\partial(\phi \cdot i)(x) = i^*\partial\phi(i(x)).$$

(i^*: $V_2' \to V_1'$ désigne la transposée de i*). On écrira si i est une injection $\partial(\phi_{/V_1})(x) = \partial\phi(x)_{/V_1}$.*

LEMME 2. *Soient V et V' deux espaces en dualité séparée et ϕ,* s.c.i. *convexe de V dans* $\mathbf{R}$. *Si x_n tend vers x dans V et y_n vers y dans*

V', y_n appartenant à $\partial\phi(x_n)$ avec $\limsup(x_n, y_n) \leqslant (x, y)$ *alors y appartient à $\partial\phi(x)$.*

Preuve. Soit v élément de V:

$$\phi(v) - \phi(x_n) \geqslant (y_n, v - x_n),$$

$$\phi(v) + (x_n, y_n) \geqslant (yn, v) + \phi(x_n).$$

A la limite

$$\phi(v) - \phi(x) \geqslant (y, v - x),$$

donc y appartient à $\partial\phi(x)$.

LEMME 3. *Soient V un Banach séparable et $\phi: V \to \mathbf{R}$ une fonction convexe continue avec $\partial\phi$ borné (c'est-à-dire borné sur les bornés).*

On peut alors définir une fonction $\Phi: L^\infty(O, T; V) \to \mathbf{R}$ par $\Phi(u) = \int_0^T \phi(u(t))\, dt$, et cette fonction est s.c.i. *sur $L^\infty(O, T; V)$ pour la topologie faible associée à la dualité:*

$$(L^\infty(O, T; V), \quad L^\infty(O, T; V')).$$

De plus $\partial\Phi$ est définie sur $L^\infty(O, T; V)$ et

$$\partial\Phi(u) = \{v, v \in L^\infty(O, T; V'), \qquad \text{et} \qquad \text{p.p.t}, \quad v(t) \in \partial\phi(u(t))\}.$$

Preuve. Le lemme 3 résulte de l'appendice [I] de Brezis [1], sauf le fait que $\partial\Phi$ est définie sur $L^\infty(O, T; V)$.[2] Pour démontrer ce dernier point, soit u_0 appartenant à $L^\infty(O, T; V)$. ϕ_1: $V \to \mathbf{R}$ est défini par: $\phi_1(x) = \sup(\langle y, x - z\rangle + \phi(z))$, le sup étant pris sur l'ensemble: $\{z, |z| \leqslant \|u_0\|, y \in \partial\phi(z)\}$, ϕ_1 est convexe, $\phi_1 \leqslant \phi$, $\phi_1 = \phi$ sur $B(O, \|u_0\|)$ et pour tout x de V

$$|\partial\phi_1(x)| \leqslant \sup_{\{|y| \leqslant \|u_0\|\}} |\partial\phi(y)|.$$

Soit alors Φ_1 définie sur $L^\infty(O, T; V)$ par $\Phi_1(u) = \int_0^T \phi(u(t))\, dt$ ϕ_1 est continue sur $L^\infty(O, T; V)$ muni de la topologie de $L^1(O, T; V)$ compatible avec la dualité $(L^\infty(O, T; V), L^\infty(O, T; V'))$ donc $\partial\Phi_1(u) \neq \phi$ pour tout u de $L^\infty(O, T; V)$ et $\partial\Phi_1(u) \subset L^\infty(O, T; V')$ mais $\Phi_1 = \Phi$ sur les u tels que $\|u\|_\infty \leqslant \|u_0\|_\infty$ et $\Phi_1 \leqslant \Phi$ partout donc $\partial\Phi_1(u) \subset \partial\Phi(u)$ pour u, $\|u\|_\infty \leqslant \|u_0\|_\infty$ donc en particulier $\partial\Phi(u_0) \neq \phi$.

[2] Ceci ne sera d'ailleurs pas utilisé dans la démonstration.

C. *Résolution de l'équation*

On utilise la méthode de discrétisation.

Notations. Soit N un entier destiné à tendre vers l'infini, $k = T/N$. Si $a = (a^n)_{n=0,\ldots,N} \in E^{N+1}$, où E est un Banach, $\Pi_k(a)$ désigne la fonction étagée de $[O, T]$ dans E définie par;

$$\Pi_k(a)(t) = a_{n+1} \qquad \text{pour} \quad nk < t \leqslant (n+1)k, \quad n = 0,\ldots,(N-1),$$
$$\Pi_k(a)(O) = a_0 .$$

De même $\Lambda_k(a)$ est la fonction de $[O, T]$ dans E, linéaire sur les intervalles $[nk, (n+1)k]$ et telle que:

$$\Lambda_k(a)(nk) = a_n\,,\ n = 0,\ldots, N, \qquad \text{et} \qquad \nabla_k \Pi_k(a) = \frac{d}{dt}\Lambda_k(a).$$

Existence d'une solution approchée

Montrons l'existence de $u_k = (u_k^{\,0},\ldots, u_k^{\,N}) \in V_1^{N+1}$ solution de:

$$u_k^{\,0} = u_0\,,\ \xi \in Bu_k^{\,0}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{k}(Bu_k^{n+1} - Bu_k^{\,n}) + Au_k^{n+1} = f_k^{\,n},\ n = 0,\ldots,(N-1), \tag{11}$$

$$\text{avec} \quad f_k^{\,n} = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} f(t)\,dt, f_k^{\,n} \in V_1{}'. \tag{12}$$

La fonction de V_1 dans $\mathbf{R}$ (avec $h \in V_1{}'$):

$$u \to (1/k)\,\Phi_B(u) + \Phi_A(u) - (h, u) = \psi(u)$$

est convexe, continue, tend vers l'infini à l'infini sur V_1 (d'après l'hypothèse de coercivité sur Φ_A) donc présente un minimum en u_* et:

$$O \in \partial\psi(u_*)$$

Comme ϕ_B, ϕ_A, h sont continues sur V_1, on a:

$$0 = \frac{1}{k}v_1 + v_2 - h \qquad \text{avec} \qquad v_2 \in \partial\phi_A(u_*)$$
$$v_1 \in \partial\phi_{B/V_1}(u_*) = \partial\phi_B(u^*)(\text{d'apres le lemme 1})$$

Prenant $h = f_k^{\,0} - (\xi/k)$, $\xi \in Bu^0$, on obtient ainsi l'existence de $u_k^{\,1}$ dans (11), puis par récurrence, celle de $u_k^{\,s}$, $s = 2,\ldots, N$.

(13) Introduisons la fonction duale $\phi_B{}^*$ de ϕ_B

$$\phi_B{}^* : V_2' \to]-\infty, +\infty],$$

définie par:

$$\phi_B{}^*(y) = \sup_{x \in V_2} [(x, y) - \phi_B(x)].$$

La fonction $\phi_B{}^*$ est convexe, s.c.i. sur V_2', finie sur $B(V_2)$.

Estimation à priori

Par abus de langage, $Bu_k{}^n$, $Au_k{}^n$, désignent les éléments appartenant à $Bu_k{}^n$, $Au_k{}^n$, qui interviennent dans la résolution de (11).

a. *Montrons,*

$$k \sum_0^N | u_k^n |_{V_1}^q \leqslant C_0 (C_0 \text{ constante independante de } k \text{ et } N) \tag{14}$$

Multipliant (11) par u_k^{n+1} il vient:

$$\frac{1}{k}(Bu_k^{n+1} - Bu_k{}^n, u_k^{n+1}) + (Au_k^{n+1}, u_k^{n+1}) = (f_k{}^n, u_k^{n+1}), \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \sum_0^s (Bu_k^{n+1} - Bu_k{}^n, u_k^{n+1}) &\geqslant \sum_0^s (\phi_B{}^*(Bu_k^{n+1}) - \phi_B{}^*(Bu_k{}^n)) \\ &= \phi_B{}^*(Bu_k^{s+1}) - \phi_B{}^*(Bu_k{}^0) \\ &\geqslant (Bu_k^{s+1}, u_k^{s+1}) - \phi_B(u_k^{s+1}) - \phi_B{}^*(Bu_k{}^0) \\ &\geqslant \phi_B(u_k^{s+1}) - \phi(O) - \phi_B(u_k^{s+1}) - \phi_B{}^*(Bu_k{}^0) \geqslant C_1'. \end{aligned} \tag{16}$$

D'après l'hypothèse faite sur ϕ_A il existe $d > 0$ tel que $| u |_{V_1} \geqslant d$ entraîne $(Au, u) \geqslant C| u |_{V_1}^q$ $(C > 0)$. On peut donc écrire en appliquant (Young),

$$\begin{aligned} &(Au_k^{n+1}, u_k^{n+1}) - (f_k{}^n, u_k^{n+1}) \\ &\qquad \geqslant (C - \epsilon)|u_k^{n+1}|_{V_1}^q - \frac{C_\epsilon}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} | f(t)|^{q'} \, dt - C_1, \end{aligned} \tag{17}$$

(la constante C_1 correspond aux $u_k{}^n$, $| u_k{}^n | < d$ pour lesquels on utilise l'hypothèse A borné).

Sommant (15) de O à $(N-1)$; multipliant par k et compte tenu de (17) il vient:

$$(18) \qquad k(C-\epsilon)\sum_{0}^{N-1} |u_k^{n+1}|_{V_1}^{q} \leqslant C_\epsilon \int_0^T |f(t)|^{q'}\,dt + TC_1 + C_2'.$$

Il en résulte (14).

b. *Montrons,*

(19) $|u_k^n|_{V_1} \leqslant C$, ($C$ indépendant de k et de n). Multipliant (11) par $(u_k^{n+1} - u_k^n)$, on obtient:

$$(20) \qquad \frac{1}{k}(Bu_k^{n+1} - Bu_k^n, u_k^{n+1} - u_k^n) + (Au_k^{n+1}, u_k^{n+1} - u_k^n) = (f_k^n, u_k^{n+1} - u_k^n).$$

Négligeant le premier terme qui est positif, et sommant de O à $s \leqslant (N-1)$ on obtient:

$$(21) \qquad \phi_A(u_k^{s+1}) - \phi_A(u_0) \leqslant \sum_0^s (f_k^n, u_k^{n+1} - u_k^n) = J_s,$$

$$J_s = (f_k^s, u_k^{s+1}) - (f_k^0, u_0) + \sum_1^s (f_k^{n-1} - f_k^n, u_k^n),$$

$$|J_s| \leqslant |u_0|\,|f|_{L^\infty} + \epsilon\,|u_k^{s+1}|_{V_1}^q + C_\epsilon |f|_{L^\infty}^{q'} + K.$$

Reportant dans (21), il en résulte:

$$(22) \qquad \phi_A(u_k^{s+1}) - \epsilon\,|u_k^{s+1}|_{V_1}^q \leqslant K',$$

et grace à l'hypothèse de croissance sur ϕ_A on en déduit (19). Montrons:

$$(23) \qquad |\phi_B^*(Bu_k^{n+1}) - \phi_B^*(Bu_k^n)| \leqslant kC_2' \; n = 0, \ldots, (N-1),$$

(14 et 19) entraînent:

$$(Bu_k^{n+1} - Bu_k^n, u_k^{n+1}) \leqslant kC_2,$$

donc

$$(24) \qquad \phi_B^*(Bu_k^{n+1}) - \phi_B^*(Bu_k^n) \leqslant kC_2.$$

Multipliant (11) par u_k^n, avec (19) il vient:

$$(Bu_k^{n+1} - Bu_k^n, u_k^n) \geqslant kC_2,$$

donc

$$\phi_B^*(Bu_k^{n+1}) - \phi_B^*(Bu_k^{\,n}) \geqslant -kC_2 \tag{25}$$

(23) résulte alors de (24) et (25).

C. *Passage à la limite*

D'après les estimations à priori:

$$\begin{aligned} \Pi_k u_k &\text{ appartient à un borné de } L^\infty(O, T; V_1), \\ A\Pi_k u_k &\text{ appartient à un borné de } L^\infty(O, T; V_1'), \\ B\Pi_k u_k &\text{ appartient à un borné de } L^\infty(O, T; V_2'), \\ \nabla_k B\Pi_k u_k &\text{ appartient à un borné de } L^\infty(O, T; V_1'), \end{aligned}$$

[ceci résulte de (11) et A borné]. Par extraction d'une sous suite, on peut supposer:

(26) $\Pi_k\ \phi_B^*(Bu_k) \to \psi$, $\psi \in \mathscr{C}([O, T], \mathbf{R})$ la convergence étant uniforme; et

$$\begin{aligned} \psi(O) &= \phi_B^*(\xi), \\ \psi(T) &= \lim_{N\to\infty} \phi_B^*(Bu_k^N), \end{aligned} \tag{27}$$

(ceci résulte de (24) et du théorème d'Ascoli).

$$\Pi_k u_k \to u \quad \text{dans } L^\infty(O, T, V_1) \text{ faible } *, \tag{28}$$

$$\Pi_k Bu_k \to v \quad \text{dans } L^\infty(O, T; V_2') \text{ faible } *, \tag{29}$$

$$\nabla_k \Pi_k Bu_k \to \frac{dv}{dt} \text{ dans } L^\infty(O, T; V_1') \text{ faible } *, \tag{30}$$

$$A\Pi_k u_k \to g \quad \text{dans } L^\infty(O, T; V_1') \text{ faible } *. \tag{31}$$

1°) Montrons que $v(t) \in B(u(t))$ presque partout. Pour cela on remarque que $\Pi_k Bu_k$ tend vers v uniformément sur $[O, T]$ dans V_1' fort, en effet les fonctions $\Lambda_k Bu_k$ sont équicontinues de $[O, T]$ dans V_1' car $\nabla_k Bu_k$ appartient à un borné de $L^\infty(O, T; V_1')$ et $\Pi_k Bu_k$ est dans un borné de V_2' donc dans un compact de V_1', il en est de même de $\Lambda_k Bu_k$. On peut donc appliquer Ascoli. Donc pour une sous suite (indexée par k)

$$\Pi_k Bu_k \to v \text{ dans } L^\infty(O, T; V_1'),$$

$$\Pi_k u_k \to u \text{ dans } L^\infty(O, T; V_1) \text{ faible } *,$$

donc

$$\int_0^T (\Pi_k B u_k , \Pi_k u_k)\, dt \to \int_0^T (v(t), u(t))\, dt.$$

Prenant $\phi = \phi_B$, on applique les lemmes 2 et 3, il en résulte alors que $v(t) \in Bu(t)$ p.p.. D'autre part $v(O) = \xi$, en effet

$$v(O) = \lim_{k\to 0} (\Pi_k B u_k)(O) = \lim_{k\to 0} \xi = \xi.$$

Enfin

(32) $\dfrac{dv}{dt} + g = f$ dans $\mathscr{D}'(O, T; V_1')$. En effet, soient $(\theta, v) \in \mathscr{D}(O, T) \times V_1'$

En multipliant (11) par $k\theta(nk)v$ et en sommant de 1 à $(N-1)$, il vient $(\theta_k(t) = \theta((n+1)k)$ pour $t \in [nk, (n+1)k[)$,

(33) $$\int_0^T [(\nabla_k \Pi_k B u_k(t), \theta_k(t)v) + (A\Pi_k u_k(t), \theta_k(t)v) - (f(t), \theta_k(t)v)]\, dt = 0$$

Comme $\theta_k \to \theta$ uniformément sur $[O, T]$ on peut passer à la limite:

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + g - f, \theta v\right) dt = 0 \qquad \forall(\theta, v) \in \mathscr{D}(O, T) \times V \text{ d'où (32)}$$

Montrons que $g(t) \in A(u(t))$ p.p. Il suffit d'obtenir l'inégalité

(34) $$\varlimsup_{k\to 0} \int_0^T (A\Pi_k u_k , \Pi_k u_k)\, dt \leqslant \int_0^T (g, u)\, dt,$$

(les lemmes 2 et 3 permettront alors de conclure) (on a d'après (15)

$$\frac{1}{k}[\phi_B{}^*(Bu_k^{n+1}) - \phi_B{}^*(Bu_k^{\,n})] + (Au_k^{n+1}, u_k^{n+1}) \leqslant (f_k^{\,n}, u_k^{n+1}).$$

En sommant de O à $(N-1)$

(35) $$\phi_B{}^*(Bu_k{}^N) + \int_0^T (A\Pi_k u_k , \Pi_k u_k)\, dt \leqslant \phi_B{}^*(\xi) + \int_0^T (f(t), \Pi_k u_k)\, dt.$$

D'après (27) on peut passer à la limite inf:

(36) $$\varliminf \int_0^T (A\Pi_k u_k , \Pi_k u_k)\, dt \leqslant \psi(O) - \psi(T) + \int_0^T (f(t), u)\, dt.$$

Moyennant (32), (34) est conséquence de:

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, u\right) dt \leqslant \psi(T) - \psi(O). \tag{37}$$

Pour cela posons

$$X_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{T-\epsilon} (v(t+\epsilon) - v(t), u(t))\, dt. \tag{38}$$

Comme $dv/dt \in L^\infty(O, T; V_1')$

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, u\right) dt = \lim_{\epsilon\to 0} X_\epsilon\,.$$

D'après (28) et la convergence forte de $\Pi_k Bu_k$ vers v dans $L^\infty(O, T; V_1')$

$$X_\epsilon = \lim_{k\to 0} X_{\epsilon,k} \quad \text{où}$$

$$X_{\epsilon,k} = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{(T-\epsilon)} ((\Pi_k Bu_k)(t+\epsilon) - (\Pi_k Bu_k)(t), \Pi_k u_k(t))\, dt, \tag{39}$$

$$X_{\epsilon k} \leqslant \frac{1}{\epsilon} \int_0^{(T-\epsilon)} [\phi_B{}^*((\Pi_k Bu_k)(t+\epsilon)) - \phi_B{}^*((\Pi_k Bu_k)(t))]\, dt$$

or $\phi_B{}^*(\Pi_k Bu_k) = \Pi_k \phi_B{}^*(Bu_k)$ tend vers ψ uniformément sur $[O, T]$, donc en faisant tendre k vers O,

$$X_\epsilon \leqslant \frac{1}{\epsilon} \int_0^{T-\epsilon} [\psi(t+\epsilon) - \psi(t)]\, dt = \frac{1}{\epsilon}\left(-\int_0^\epsilon \psi(t)\, dt + \int_{T-\epsilon}^T \psi(t)\, dt\right)$$

et (ψ étant continue)

$$\lim_{\epsilon\to 0} X_\epsilon \leqslant \psi(T) - \psi(O)$$

(37) est ainsi démontré et la preuve de la proposition (1) est ainsi achevée.

Remarque 1. En fait on a: $\int_0^T (dv/dt, u)\, dt = \psi(T) - \psi(O)$ il suffit d'obtenir l'inégalité inverse de (37) et pour cela de prendre

$$Y_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_\epsilon^T (v(t) - v(t-\epsilon), v(t))\, dt.$$

Remarque 2. Si on remplace l'hypothèse

$$\liminf_{|u|_{v_1}\to\infty} \frac{\phi_A(u)}{|u|_{V_1}^q} > 0$$

par

$$\begin{cases} \phi_A(u) \geqslant C \mid u \mid_{V_1}^q , \\ \phi_A(O) = 0. \end{cases} \quad (C > 0)$$

et les conditions sur f par:

$$f \in L^\infty(\mathbf{R}^+, V_1{}') \cap L^{q'}(\mathbf{R}^+, V_1{}')$$

$$f' \in L^{q'}(\mathbf{R}^+, V_1{}')$$

on obtient une solution de $(d/dt)(Bu) + Au \ni f$ dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^+, V_1{}')$ vérifiant:

$$Bu(O) = \xi \in Bu_0$$

$$u \in L^\infty(\mathbf{R}^+, V_1) \cap L^q(\mathbf{R}^+, V_1).$$

Cas des Inéquations

A. *Hypothèses et Notations*:

(1) Soient V_1 et V_2 deux Banach réflexifs, séparables $V_1 \overset{i}{\hookrightarrow} V_2$, l'injection i étant dense et compacte.

(2) Soit $B = \partial\phi_B$ où ϕ_B: $V_2 \to \mathbf{R}$ est une fonction convexe continue, astreinte de plus à: $\forall\lambda \geqslant 0$, $\phi_B(\lambda x) = \lambda\phi_B(x)$.

(3) Soit $A = \partial\phi_A$ où ϕ_A: $V_1 \to \mathbf{R}$ est une fonction convexe continue. A est de plus supposé borné sur les bornés et:

$$\liminf_{|u|_{V_1} \to +\infty} \frac{\phi_A(u)}{|u|_{V_1}} = +\infty.$$

Remarque. Comme ϕ_B est positivement homogène $B(V_2)$ est borné dans $V_2{}'$.

(4) Soit K un convexe fermé de V_1 avec $O \in \mathring{K}$ ($\mathring{K}$ désigne l'intérieur de K).

B. *Enoncé de la proposition*

Données.

(5) Soit $u_0 \in K$ et $\xi \in Bu_0$

(6) Soit $f \in L^\infty(O, T; V_1{}')$

PROPOSITION 2. *Moyennant les hypothèses et les données énoncées ci-dessus, il existe:*

(7) $u \in L^\infty(O, T; V_1)$,

(8) $v \in L^\infty(O, T; V_2')$ *tel que* $v(t) \in Bu(t)$ p.p. *en* t,

(9) $dv/dt \in L^\infty(O, T; V_1')$,

(10) $(Bu)(O) = \xi$,

(11) $[(dBu/dt) - f,\ a - u]_{V_1', V_1} + \phi_A(a) - \phi_A(u(t)) \geqslant 0$ p.p. *ent et* $\forall a \in K$.

Remarque. En particulier si $V_1 = K$, u est solution de l'équation

$$\begin{cases}(d/dt)(Bu) + Au \ni f \\ \xi \in Bu(O).\end{cases}$$

C. *Démonstration*

Soit ψ_K la fonction indicatrice de K c'est-à-dire:

$$\begin{cases}\text{si } x \in K & \psi_K(x) = 0, \\ \text{si } x \notin K & \psi_K(x) = +\infty.\end{cases}$$

Cette fonction est convexe s.c.i. a valeur dans $[O, +\infty]$ (car K est un convexe fermé). On note pour simplifier $\partial\psi_K = \hat{K}$, qui vérifie:

$$\text{si } x \in \mathring{K} \quad \hat{K}(x) = 0,$$
$$\text{si } x \notin K \quad \hat{K}(x) = \varnothing,$$

si $x \in$ Frontière de K: $\hat{K}(x)$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur V_1, définissant les hyperplans d'appui de K passant par x.

On utilise la méthode de discrétisation. Comme précédemment N désigne un entier destiné à tendre vers l'infini et $k = T/N$. Le système:

(12) $$u_k^0 = u_0,\ \xi \in Bu_k^0,$$

(13) $$\frac{1}{k}(Bu_k^{n+1} - Bu_k^n) + Au_k^{n+1} + \partial\psi_k(u_k^{n+1}) = f_k^n,$$

(14) $$u_k^n \in K \qquad n = 0,\dots, N-1,$$

où $f_k^n = (1/k)\int_{nk}^{(n+1)k} f(t)\, dt$, admet une solution (il suffit de considérer la fonction $[(1/k)\phi_B + \phi_A + \psi_K - h]$ définie sur V_1 $(h \in V_1')$, de remarquer qu'elle est convexe s.c.i., tend vers l'infini à l'infini (d'après les propriétés de ϕ_A) donc elle admet un minimum en un point qui appartient nécessairement à K.

Estimation à priori

On remarque au préalable que: $\forall v \in K$, $(\hat{K}u_k^{n+1}, v) \leqslant (\hat{K}u_k^{n+1}, u_k^{n+1})$ et comme $O \in \hat{K}$, il existe une constante C telle que:

$$0 \leqslant | \hat{K}u_k^{n+1} |_{V_1} \leqslant C(\hat{K}u_k^{n+1}, u_k^{n+1}). \tag{15}$$

D'autre part la fonction duale de ϕ_B, $\phi_B{}^*$ ne peut prendre que les valeurs O et $+\infty$ donc, est la fonction indicatrice d'un convexe fermé de V_2', en particulier $\phi_B{}^*$ est nulle sur l'image de V_2 par B. Multiplions (13) par u_k^{n+1}, il vient

$$\frac{1}{k}(Bu_k^{n+1} - Bu_k{}^n, u_k^{n+1}) + (Au_k^{n+1}, u_k^{n+1}) + (\hat{K}u_k^{n+1}, u_k^{n+1}) = (f_k{}^n, u_k^{n+1}), \tag{16}$$

or

$$(\hat{K}u_k^{n+1}, u_k^{n+1}) \geqslant 0$$

et

$$\frac{1}{k}(Bu_k^{n+1} - Bu_k{}^n, u_k^{n+1}) \geqslant \frac{1}{k}[\phi_B{}^*(Bu_k^{n+1}) - \phi_B{}^*(Bu_k{}^n)] = 0,$$

donc

$$(Au_k^{n+1}, u_k^{n+1}) \leqslant | f |_{L^\infty(O,T;V_1')} | u_k^{n+1} |_{V_1}, \tag{17}$$

d'où l'on déduit à l'aide des hypothèses sur ϕ_A:

$$(\Pi_k u_k) \text{ reste dans un borné de } L^\infty(O, T; V_1). \tag{18}$$

Reportant ceci dans (16) il en résulte avec (15) que

$$(\hat{K}u_k^{n+1}) \text{ reste dans un borné de } L^\infty(O, T; V_1'). \tag{19}$$

Reportant dans (13) il vient:

$$(\nabla_k \Pi_k B u_k) \text{ reste dans un borné de } L^\infty(O, T; V_1'). \tag{20}$$

Passage à la limite

Par extraction d'une sous suite (indexée encore par k) on peut supposer:

$$\Pi_k u_k \to u \text{ dans } L^\infty(O, T; V_1) \text{ faible } *, \tag{21}$$

$$\Pi_k B u_k \to v \text{ dans } L^\infty(O, T; V_2') \text{ faible } *, \tag{22}$$

$$\nabla_k \Pi_k B u_k \to dv/dt \text{ dans } L^\infty(O, T; V_1' \text{ faible}) *, \tag{23}$$

$$(A + \hat{K})(\Pi_k u_k) \to \chi \text{ dans } L^\infty(O, T; V_1') \text{ faible } *. \tag{24}$$

Montrons que: $v(t) \in Bu(t)$ p.p. en t. En appliquant Ascoli, on obtient, comme dans la première partie que:

$$\Pi_k Bu_k \to v \text{ uniformément dans } V_1'. \tag{25}$$

Utilisant alors les lemmes 2 et 3, on en déduit que $v(t) \in Bu(t)$ p.p. en t, de plus $v(t) \in \mathscr{C}([O, T], V_1')$ et donc $v(O) = \xi \in Bu(O)$. On a aussi la relation:

$$\frac{dv}{dt} + \chi = f \text{ dans } L^\infty(O, T; V_1'). \tag{26}$$

En effet, comme chacune de ces fonctions appartient à $L^\infty(O, T; V_1')$, il suffit donc de la vérifier dans $\mathscr{D}(]OT[; V_1')$ ce qui se démontre de la même façon que dans la première partie.

Il reste à montrer la relation (11) pour cela on obtient par sommation de (16) de O à $(N-1)$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} (Bu_k^{n+1} - Bu_k^n, u_k^{n+1}) + \sum_{n=0}^{N-1} k(Au_k^{n+1}, u_k^{n+1}) \\ + \sum_{n=0}^{N-1} k(\hat{K}u_k^{n+1}, u_k^{n+1}) = \int_0^T (f(t), \Pi_k u_k(t))\, dt.\end{aligned} \tag{27}$$

Comme le premier terme de gauche est positif (d'après les propriétés de $\phi_B{}^*$) il vient:

$$\underline{\lim} \int_0^T ((A + \hat{K})(\Pi_k u_k)(t), \Pi_k u_k(t))\, dt \leqslant \int_0^T (f(t), u(t))\, dt \tag{28}$$

d'où, en utilisant (26);

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{k\to 0} \int_0^T ((A + \hat{K})(\Pi_k u_k)(t), (\Pi_k u_k)(t))\, dt \\ \leqslant \int_0^T (\chi, u(t))\, dt + \int_0^T \left(\frac{(dv)(t)}{dt}, u(t)\right) dt.\end{aligned} \tag{29}$$

Par un procédé analogue à celui de la première partie, on montre (grâce aux propriétés de $\phi_B{}^*$) que

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, u\right) dt = 0,$$

donc

$$\underline{\lim}_{k\to 0} \int_0^T ((A + \hat{K})(\Pi_k u_k)(t), (\Pi_k u_k)(t))\, dt \leqslant \int_0^T (\chi, u(t))\, dt.$$

Moyennant le lemme (2′) énoncé ci dessous et appliqué avec:

$$V = L^\infty(O, T; V_1),\ V' = L^\infty(O, T; V_1'),$$

$$C = \{v, v \in L^\infty(O, T; V_1) \quad \text{avec} \quad v(t) \in K \text{ p.p.}\},$$

$$\phi(v) = \int_0^T \phi_A(v(t))\, dt \quad (\text{pour} \quad v \in L^\infty(O, T; V_1)),$$

$$x_k = \Pi_k u_k\,,\ (x_k \rightarrow u \text{ dans } V \text{ faible}),$$

$$y_k \in V' \quad \text{défini par } y_k(t) = A((\Pi_k u_k)(t)) + \hat{K}((\Pi_k u_k)(t)),$$

$y_k \rightarrow \chi = (dBu/dt) - f$, dans V' muni de la topologie $\sigma(V', V)$, on obtient (car l'hypothèse du lemme 2′) dans ce cas n'est autre que la relation (30);

(31) $\forall w \in L^\infty(O, T; V_1)$, $w(t) \in K$ p.p.:

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt} - f, w(t) - u(t)\right) + \phi_A(w(t)) = \phi_A(u(t))\, dt \geqslant 0.$$

Par une méthode standard on en déduit la proposition 2.

LEMME 2′. *Soient V et V' deux espaces vectoriels en dualité séparée, C un convexe fermé de V, ψ_C la fonction indicatrice de $C(\psi_C = 0$ sur C, $+\infty$ sur $V - C)$, ϕ une fonction convexe* s.c.i. *sur V. Si*

$$x_n \rightarrow x \text{ dans } V \text{ pour } \sigma(V, V')$$

et

$$y_n \rightarrow y \text{ dans } V' \text{ pour } \sigma(V', V)$$

avec $y_n \in \partial(\phi + \psi_C)(x_n)$ et $\lim(x_n, y_n) \leqslant (x \cdot y)$ *alors $\forall b \in C$ on a:*

$$(y, b - x) + \phi(x) \leqslant \phi(b)$$

i.e. $y \in \partial(\phi + \psi_C)(x)$.

La démonstration en est immédiate.

REFERENCES

1. H. BREZIS, Problèmes unilatéraux, *Math. Pures Appl.*, in press.
2. J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Chap. IV, §1.3, Dunod, Paris, 1969.
3. P. A. RAVIART, Sur la résolution de certaines équations paraboliques non linéaires, *J. Functional Analysis* **5** (1970), 299–328.